8-oct. 2015

ALGEBRA LINEAL

TEMA 2: MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MATRICES

Se llama matriz de orden $m \times n$ a todo conjunto ordenado de números formado por m-filas y n-columnas del tipo:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{fijas } (m\text{-filas})$$

$\uparrow$ columnas (n-columnas)

Si $m=n$, A se dice una matriz cuadrada de orden n.

a_{ij} son números reales o complejos.

Denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ cuyos elementos $a_{ij} \in K$, donde $K = \mathbb{R}$ ó $K = \mathbb{C}$.

Algunas matrices destacadas

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ≡ matriz identidad de orden n.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & \cdots & \cdot \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & 0 & d_n \end{pmatrix} \equiv \text{matriz diagonal.}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ - & - & - & - \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \text{triangular superior}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \text{triangular inferior}$$

OPERACIONES CON MATRICES

SUMA: sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}$

se define la matriz suma $A + B = C \in M_{m\times n}$

como $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$ y $\alpha \in k$.

Se define la matriz αA como la matriz con entradas

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\alpha = 3$

$$\alpha A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

Dadas $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\cancel{B \in \mathcal{M}_n}$.

$$B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times p}$$

se define el producto $A \cdot B = C \in \mathcal{M}_{m\times p}$

como
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplos:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\in \mathcal{M}_{3\times 3} \qquad\qquad \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \underbrace{1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}_{2} + 3\cdot 0 & 9 \\ 2 & 14 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

El producto de matrices no es conmutativo.

PRODUCTO ESCALAR Ó CONTRACCIÓN DE DOS MATRICES

Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Se define el producto escalar ó contracción de A y B como

$$A : B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A : B = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4.$$

TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Dada ~~A~~ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$, se llama traspuesta de A, denotado A^t ó A^* a la matriz $A^t = (b_{ij} = a_{ji}) \in \mathcal{M}_{n \times m}$,

es decir para calcular A^t se cambian filas por columnas.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

MATRICES ESCALONADAS

Una matriz A se dice escalonada si cada fila tiene más ceros (de izq. a derecha) que la fila anterior

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

MÉTODO DE ESCALONIZACIÓN DE GAUSS: consiste en hacer 3 tipos diferentes de operaciones (llamadas operaciones elementales) sobre las filas de una matriz para conseguir transformarla en una matriz escalonada. Estas operaciones son:

1) Cambiar el orden de dos filas ($F_i \longleftrightarrow F_j$)
2) Multiplicar una fila por un nº (escalar) ($F_i \longrightarrow \alpha F_i$)
3) Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar ($F_i \longrightarrow F_i + \alpha F_j$)

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RANGO DE UNA MATRIZ

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(k)$. Se llama rango de A, denotado $r(A)$, al número de filas no nulas que resultan después de escalonar una matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - 2F_1}]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{r(A) = 3}$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada. Se dice que A es invertible si existe otra matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

En ese caso, denotamos $B = A^{-1}$ y la llamamos inversa de A.

~~Propiedad~~

Prop. A es invertible si y sólo si $r(A) = n$.

MÉTODO DE GAUSS PARA EL CÁLCULO DE LA INVERSA

Consiste en escribir $(A \mid I_n)$ y hacer operaciones elementales hasta conseguir tener la identidad a la izquierda. A la derecha nos queda la inversa de A.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to (-1)\times F_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2}$$

~~F_3~~

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to (-1)\times F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -12 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$= A^{-1}$$

Estrategia a seguir:

1. Hacer ceros debajo de la diagonal principal ~~emp~~ de ~~arr~~ izquierda a derecha
2. Convertir los elementos de la diagonal principal en 1.
3. Hacer ceros por encima de la diagonal principal de derecha a izq.

DETERMINANTES

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$, $n=1,2,3$. Se llama determinante de A, denotado $|A|$ ó $\det(A)$, al escalar ~~que~~ dado por:

$n=1$, $\quad A=(a)$, $\quad \det(A)=a$

$n=2$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$

$n=3$ $\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$

- Definición recursiva de $\det(A)$ para $n \geq 4$.

Algunas definiciones previas.

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(k)$, $n \in \mathbb{N}$.

- Se llama "<u>menor</u>" de $A=(a_{ij})$ al determinante de cualquier submatriz de A.

- Se llama "<u>menor complementario</u>" del elemento a_{ij} al determinante que se obtiene quitando la fila i y la columna j.

- Se llama "<u>adjunto</u>" de a_{ij}, denotado A_{ij}, a su menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+j}$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Menor complementario de a_{31}

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 15$$

Adjunto de a_{31}: $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 15$

Menor complementario de a_{21}

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -9$$

Adjunto de a_{21}: $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 9.$

~~Cálculo d~~

Definición (recursiva) del determinante por adjuntos.

Sea $A \in M_{n\times n}$. Entonces,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{lj} A_{lj}$$

para cualquier fila l.

Notas.

1.) También se puede hacer por columnas

2) La definición anterior no depende de la fila(s) ó columna(s) elegidas.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\, A_{32} = -2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(3-6) = -6.$$

Propiedades básicas de los determinantes

Sea $A \in M_{n\times n}$ y denotemos por $F_1, F_2, \dots, F_n$ sus filas (ó columnas)

Se cumple:

1) Si $F_i = F_i' + F_i''$, entonces,

$$\det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n) = \det(F_1, \dots, F_i', \dots, F_n) + \det(F_1, \dots, F_i'', \dots, F_n).$$

2) $\det(F_1, \dots, \alpha F_i, \dots, F_n) = \alpha \det(F_1, \dots, F_n)$

3) $\det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_j, \dots, F_n) = -\det(F_1, \dots, F_j, \dots, F_i, \dots, F_n)$

4) ~~$\det(F_1, \dots, F_i + \alpha F_j, \dots, F_n) = \det$~~

4) ~~A es invertible~~

4) $\det(F_1, \dots, F_i + \alpha F_j, \dots, F_n) = \det(F_1, \dots, F_i, \dots, F_n)$

5) A es invertible $\iff \det(A) \neq 0$. En este caso,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

6) Si A es triangular superior o inferior, entonces $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal principal.

7) $\det(A) = \det(A^t)$

8) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Cálculo del rango y la inversa con determinantes.

Rango: • es el orden del mayor menor NO NULO.

Inversa: A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

En ese caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\mathrm{Adj}\, A)^t.$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En forma matricial, un sistema lineal de ecuaciones tiene la forma

$$Ax = b \qquad (*)$$

donde:

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}(k)$

$x = (x_1, \ldots, x_n)^t \equiv$ incógnita

$b = (b_1, \ldots, b_m) \equiv$ término independiente.

Desarrollando (*) tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \quad (*)$$

- El sistema (*) se dice que es compatible determinado (SCD) si tiene una única solución.
- (*) se dice compatible indeterminado (SCI) si tiene infinitas soluciones que dependen de un nº de parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

(*) se dice incompatible (SI) si no tiene solución.

(*) se dice homogéneo si $b = 0$.

<u>Teorema</u> (Rouché - Frobenius)

Consideremos el sistema $Ax = b$ y sea $(A|b)$ la matriz ampliada asociada. Entonces:

1º) (*) es (SCD) $\Longleftrightarrow r(A) = r(A|b) =$ nº de incógnitas

2º) (*) es (SCI) $\Longleftrightarrow r(A) = r(A|b) <$ nº de incógnitas. En este caso, ~~el~~ la solución depende de nº de incógnitas $- r(A)$ parámetros

3º) (*) es (SI) $\Longleftrightarrow r(A) \neq r(A|b)$.

Métodos (analíticos) para la resolución de un sistema lineal

· **Método de Gauss**: consiste en escribir la matriz ampliada $(A|b)$ y hacer operaciones elementales hasta conseguir un sistema escalonado equivalente al anterior, el cual se resuelve fácilmente.

Ejemplo

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 5x - 3y + 10z &= 2 \\ 2y - 5z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 10 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ 2y - 5z &= -3 \\ 0 &= 6 \end{aligned}\right\} \to (S.I) \text{ no tiene solución.}$$

Método de Cramer (determinantes)

· ~~Si r(A) = n = nº~~

Consideremos el sistema $Ax=b$ de orden n.

· Si $r(A) = n =$ nº de incógnitas (SCD), entonces ~~sean~~

$$x_i = \frac{|M_i|}{|A|},$$

donde $M_i \equiv$ matriz obtenida a partir de A cambiando la columna i-ésima por el término independiente.

· Si $r(A) = r(A|b) = k <$ nº de incógnitas, entonces elegimos un menor no nulo de orden k. Las incógnitas que no forman parte del menor pasan al término independiente y se procede como en el caso anterior.

Ejemplos

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 3 - (-1 - 2 - 9)$$

$$= 4 + 12 + 0.$$

$$= 16.$$

$$x_1 = \frac{|M_1|}{|A|} = \frac{\left|\begin{matrix}\cancel{1}\\ \cancel{3}\end{matrix}\right|}{\cancel{16}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{16} = 1$$

$$x_2 = \frac{|M_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = 1$$

$$x_3 = \frac{|M_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{|A|} = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} x - z &= -1 \\ 2x + y + z &= -5 \\ 4x - y - 3z &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 \;, \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$r(A) = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$r(A|b) = 2$. (S.C.I.) nº incognitas $- \, r(A) = 1$ parametro.

Menor no nulo: $\begin{array}{cc} x & y \\ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right) & \end{array}$

$$z = \lambda$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -1+\lambda \\ 2x+y &= -5-\lambda \\ 4x-y &= 3+3\lambda \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} y &= 4x-3-3\lambda \\ &= 4(-1+\lambda)-3-3\lambda \\ &= -4+4\lambda-3-3\lambda \\ &= \lambda-7 \end{aligned}$$

~~x~~

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -1+\lambda \\ y &= -7+\lambda \qquad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}}$$